

MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.....
No :.....

20.01.2026

Soru 1) G mertebesi 5 olan bir basit graf ve H, G grafının tümleyeni olsun. Eğer $\Omega(G)-\Omega(H) = 8$ ise H tümleyen grafının kenar sayısı kaçtır?

G 'nin mertebesi (köşe sayısı) 5 ise H 'in mertebesi de 5'tir. G 'nin boyutu (kenar sayısı) m ise H 'in boyutunun $n(n-1)/2 - m$ olduğunu da biliyoruz. O halde

$$\Omega(G) = 2(m-n) = 2m-10$$

ve

$$\Omega(H) = 2((n^2-n)/2-m-5)$$

olur ve böylece

$$\Omega(G)-\Omega(H) = 4m-20$$

elde edilir. O halde $4m-20 = 8$ denkleminde $m = 7$ bulunur ve tümleyenin kenar sayısının $10-7 = 3$ olduğu bulunur.

Soru 2) Bir derece dizisindeki 2'lerin omega invaryantın hesaplanmasında neden önemsiz olduğunu açıklayınız

Derece dizisindeki her bir d sayısı için omega invaryantın karşılık gelen değeri $d-2$ 'dir. Dolayısıyla $d=2$ iken bu sayının omegaya katkısı $2-2 = 0$ olur. Yani önemsizdir. Topolojik olarak da derecesi 2 olan bir köşe, bir kenar üzerine eklendiğinde o kenara komşu yeni bir yüz oluşmaz. Sadece o kenara komşu çokgenin uzunluğunu 1 arttırır. Bu kapalı yüz sayısının artmayacağı anlamına gelir ki bu da omega invaryantın değişmemesi anlamına gelir.

Soru 3) Bir C_n devirli grafına yeni bir kenar eklediğimizde elde edilen bağlantılı grafın omega invaryantı hangi değerleri alabilir?

Bağlantılı bir graf elde edilmesi istendiğinden iki ihtimal vardır. Mevcut iki köşeyi birleştiren bir kenar devirli grafı iki kapalı yüze böler ve omega invaryantı 2 olur. Eğer devirli graf üzerindeki bir noktayı dışarıdaki yeni bir köşeye birleştirirsek yeni bir yüz oluşmaz ve omega invaryantı 0 olur.

Soru 4) Uzunluğu 5 olan bir devir içeren bir grafın neden iki parçalı bir graf olamayacağını açıklayınız.

İki parçalı bir grafta köşelerin bir kısmı siyah geriye kalanlar beyazdır ve her bir kenar bir beyaz köşeyi bir siyah köşeye birleştirir. Eğer 1, 3, 5, 7, ... gibi tek uzunluklu bir devir (burada 5 verilmiş) varsa, diyelim ki beyaz köşeden başladığımızda devirin son köşesi siyah bir köşe olacaktır. Ama bir devirin başlangıç ve bitişi aynı köşe olmalıdır.

Soru 5) 20 kenara sahip bir dostluk grafının köşe sayısı hangi değerleri alabilir?

$D_{r,s}$ dostluk grafının kenar sayısı $m = rs$ olduğundan $rs = 20$ olacak şekilde $r \geq 3$ ve $s \geq 2$ doğal sayılarını bulmalıyız. Bunlar $r=4, s=5$; $r=5, s=4$ ve $r=10, s=2$ şeklindedir. $D_{r,s}$ dostluk grafının köşe sayısı ise $n = s(r-1)+1$ olup bu üç (r,s) ikilisi için sırasıyla $n = 16, 17$ ve 19 elde edilir.

Süre 50 dakikadır. Başarılar.

inc